Corrigé DM 7 (EDHEC 2003) par Pierre Veuillez

1.

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
e^x-1		$\nearrow -$	0	$+\nearrow$	
$\dfrac{e^x-1}{x}$		$+$	0	$+$	

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad \dfrac{e^x-1}{x} > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

2. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $x \neq 0$ et $\dfrac{e^x-1}{x} > 0$ comme composée de fonctions continues.
En 0 : $e^x - 1 \sim x$ donc $\dfrac{e^x-1}{x} \to 1$ et $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) \to 0$ donc $f(x) \to f(0)$ donc f est continue en 0
Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. f est de classe C^1 sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions C^1 et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} \frac{e^x x - (e^x-1)}{x^2} \\ &= \frac{e^x(x-1)+1}{x(e^x-1)} \end{aligned}$$

pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

4. a) On utilise le développment limité de exp en 0 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$
Pour $x \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x-1)+1}{x(e^x-1)} \\ &= \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)(x-1)+1}{x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)-1\right)} \\ &= \frac{x+x^2-1-x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)+1}{x^2(1+\varepsilon_1(x))} \\ &= \frac{\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)}{x^2(1+\varepsilon_1(x))} = \frac{\frac{1}{2}+\varepsilon_2(x)}{1+\varepsilon_1(x)} \\ &\to \frac{1}{2} \text{ quand } x \to 0 \end{aligned}$$

b) Donc f est continue su $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 et $f'(x) \to 1/2$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 1/2$

5. a) Etudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x\,e^x - e^x + 1$
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = x\,e^x + e^x - e^x = x\,e^x$ d'où ses variations :

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow +$	0	$+\nearrow$	

et son signe

b) Comme, pour $x \neq 0$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(e^x-1)}$ alors

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	
e^x-1		$\nearrow -$	0	$+\nearrow$	
$f'(x)$		$+$	$1/2$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -$	0	$+\nearrow$	$+\infty$

En $+\infty$: $x = o(e^x)$ donc $\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x\left[1-e^{-x}\right]}{x} \to +\infty$
En $-\infty$: $\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \to -\infty$

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Par récurrence :
   - $u_0 > 0$.
   - Soit $n \geq 0$ tel que $u_n > 0$ alors $f(u_n) > 0$ car $f > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc $u_{n+1} > 0$
   - Donc pour tout entier n, $u_n > 0$
7. a) Pour $x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right) = f(-x) \end{aligned}$$

   b) Donc pour $x > 0$, $-x < 0$ et $f(-x) < 0$ d'après le tableau des variations de f et $f(x) - x < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   c) Comme pour tout n, $u_n > 0$ alors $f(u_n) - u_n < 0$ et $u_{n+1} < u_n$
   La suite (u_n) est donc décroissante.
8. La suit u est donc décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$
   Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue en ℓ et donc $f(\ell) = \ell$.
   Comme $f(x) - x = f(x)$ et ne s'annulle qu'en 0, on a donc $\ell = 0$
   Donc la suite u converge vers 0 en $+\infty$.
9. Écrire un programme en `Pascal` permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.
   Il faut ici faire calculer u_n et n -puisque c'est lui que l'on demande- tant que u_n est supérieur 10^{-3}. Le premier n qui ne vérifiera pas cette condition sera celui recherché.

```
program suite ;
var u :real ;n :integer ;
function f(x :real) :real ;
begin f :=ln((exp(x)-1)/x) end ;
begin
    u :=1 ;n :=0 ;
    while u > 1E-3 do
    begin u :=f(u) ;n :=n+1 end ;
    writeln(n) ;
end.
```