Mémento sommes et séries

1 Sommes finies

Définitions $\sum_{k=a}^{b} u_k$ est défini pour $a \leq b$;

$\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = u_a + u_{a+1} + \cdots + u_b$ pour les petites sommes.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0$ pour les récurrences.

1.1 Opérations

Chasles (découpage horizontal) Valable uniquement si toutes les bornes sont en ordre croissant !

Linéarité (découpage vertical) Somme de sommes.

Factorisation des constantes par rapport à l'indice de sommation.

Réindexation Change les deux bornes et le contenu. Mais ce n'est pas le meilleur moyen pour rectifier les bornes.

Pour $x \neq 1$, calculer $\displaystyle(1-x)\sum_{k=0}^{n} kx^k$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$.

Dérivation Pour les sommes finie ! $x \to x^0$ se dérive en $x \to 0$.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1}$

Simplification diagonale Il faut avoir exactement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$

Inégalités Montrer que pour tout $k \geq 2$: $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ en déduire un majorant de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1.2 Sommes usuelles

- $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} 1 = b - a + 1$ si $a \leq b$
- $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- pour $a \leq b$: $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} q^k = \begin{cases} b-a+1 & \text{si } q = 1 \\ q^a \dfrac{1-q^{b-a+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$

  Mnémotechnique : $b - a + 1$ est le nombre de termes dans la somme
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

1.3 Méthodes

Qui est l'indice, qui est constant en facteur (factoriser ou puissances en produit).
Les formules usuelles sont pour toutes bornes supérieure (substituer) , mais la borne inférieure est imposée (la rectifier).
Quand il manque une puissance : 1^k est en facteur !
Les formules usuelles ne comprennent qu'une seule puissance : produit en puissance ou produit en somme.
Quand la formule est changeante, découper la somme suivant les conditions, **avant**. de remplacer par la formule.
réiondexation pour les nombres pairs : $i = 2k$ et pour les impairs : $i = 2k + 1$
Ajuster un coefficient : manipulations de puissances, réindexation (modifiera aussi les bornes)

Exemples : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2k + 1 : \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} : \sum_{k=0}^{n+2} k^2 : \sum_{k=3}^{n} k^2 : \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$:
$\sum_{k=0}^{n} q^{2k} : \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot 3^k : \sum_{k=0}^{n} (k+1)(k+2) : \sum_{k=0}^{3n} |n-k| : \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} k^2 : \sum_{k=0}^{2n} k\,(-1)^k$

Formule du binôme Pour la formule du binôme, la puissance se lit dans le coefficient du binôme.

Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k+1}$

Transformation du coefficient :

- symétrie $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$ et en déduire leurs valeurs.

- triangle de Pascal $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,

- factorielle Ecriture factorielle de $\displaystyle\binom{n}{k}$ uniquement si $0 \leq k \leq n$.

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ uniquement si $n \geq 0$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = ?$

$\displaystyle k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ si $k \geq 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot \tbinom{n}{k}$

1.4 Sommes doubles

Basiques Mettre des parenthèses. Distinguer variables et constantes. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} i \cdot j$

Permutation de sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n}$ somme pour tous les couples d'entiers (i, j) tels que :

$1 \leq i \leq n$ et $i \leq j \leq n$; que l'on regarde comme $1 \leq i \leq j \leq n$;

puis mettre j en premier $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq j$; pour trouver $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j}$

Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$

1.5 Programmation

Algorithme On utilise la relation de récurrence $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}$

Une variable `S` contiendra les sommes $\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour es valeurs successives de `n`

`S :=0 ;` (initialisation) et on répète `S :=S+u` où `u` devra contenir le terme suivant.

Si le terme suivant se calcule lui même par récurrence :

`S :=u0 ;` puis répète { `u :=f(u) ;S :=S+u ;`}

Exemple Calcul de $\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{k!}$

On utilise $\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}\frac{1}{k!}$ affecté à `F`.

Décider si l'indice `k` de boucle est le suivant ou le précédent.

2 Séries

2.1 Définitions

Série notée $\sum_{k\geq 1} u_k$: série de terme général $(u_k)_{k\geq 1}$ et de premier indice 1.

Série convergente signification ?

Somme de la série notée $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ est ?

Aboslue convergente Définition ?

Théorème Si elle est absolument convergente alors elle est convergente.

Intérêt critères de convergence.

Le contre exemple $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}(-1)^k$ (cf séries de Riemann)

Montrer que les suites $\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}(-1)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}(-1)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Conclure.

2.2 Usuelles

Géométriques et dérivées Convergent si $|q| < 1$ et divergent sinon.

$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$: $\sum_{k=a}^{+\infty} q^k = q^a\frac{1}{1-q}$

$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$: $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

$\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$: $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2q^k = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$

Exercice Démontrer la première et la troisième

Exponentielles convergent $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$. Classique $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k}\frac{2^k}{n!}$

Riemann $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

2.3 Opérations

Méfiance Chercher l'erreur :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = 2^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k-1} = 1 + 2\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \text{ donc } \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k - 2\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = -1$$

somme de termes positifs ! Conclusion ?

Prudence Si la convergence n'est pas connue, on repart de la somme partielle.

2.4 Cours : Critères de convergence

Critère de divergence : Si $u_n \not\to 0$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge

Preuve : par la *contraposée.*

Telescopiques : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+1} - u_n$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Le démontrer.

Rappel Une suite croissante et .... est convergente,
une suite croissante et non ....tend vers $+\infty$.

Lemme Une série à termes positifs est croissante. (Signification ? Le démontrer).
Que peut-on en déduire suivant qu'elle est majorée ou non.

Théorème pour les séries à termes positifs. Si pour tout $k \geq 0 : 0 \leq u_k \leq v_k$ alors :
a) si $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge alors $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge (par majoration de termes positifs)
b) si $\sum_{k\geq 0} u_k$ diverge alors $\sum_{k\geq 0} v_k$ diverge (par minoration de termes positifs)

Preuve Les sommes partielles vérifient les mêmes inégalités.
Puis on a convergence ou divergence par minoration ou majoration.

Théorème pour les séries à termes positifs. Si $v_n \geq 0$ et $u_n \geq 0$ et que $u_n = o(v_n)$ alors :
a) si $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge alors $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge (par majoration de termes positifs)
b) si $\sum_{k\geq 0} u_k$ diverge alors $\sum_{k\geq 0} v_k$ diverge (par minoration de termes positifs)

Preuve Que signifie $u_n = o(v_n)$? et il existe un rang n_0 à partir duquel $0 \leq u_n/v_n \leq 1$ et $u_n \leq v_n$.
On est alors ramené au théorème précédent.

Théorème pour les séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$ et que $v_n \geq 0$ alors :
$\sum_{k\geq 0} u_k$ converge si et seulement si $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge. (par équivalence de termes positifs)

Preuve Que signifie $u_n \sim v_n$? et il existe un rang n_0 à partir duquel $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$ d'où $\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$ et la convergence ou la divergence par application du premier théorème.

Méthode On fait apparaître un équivalent qui est une série de référence. Sinon, on fait apparaître un terme qui tend vers 0 fois une série de référence.

Exercice Convergence de $\sum_{k\geq 1} \frac{k+1}{k^2+3}$.

Astuce Montrer que la série de terme général $\frac{\ln(k)}{k^3}$ converge.
Idem pour $\left((-1)^k \ln(k) \cdot e^{-k}\right)_{k\geq 1}$